www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

Notations:

Pour tout nombre complexe z, on note $|z|$ le module de z.

Pour tout ensemble fini A, on note $|A|$ le nombre d'éléments de A.

Pour toute partie bornée A de $\mathbf{R}$, on note $\sup(A)$ (respectivement $\inf(A)$) la borne supérieure (respectivement inférieure) de A.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note ρ_n l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ qui à tout entier associe sa classe modulo n.

Soient a et b deux entiers > 0. La notation $a|b$ signifie que a divise b.

Dans les parties I, II et III du problème, on se donne un nombre entier $Q \geq 2$, ainsi qu'une partie finie non vide $X \subset \mathbf{Z}$; on pose $N = \sup(X) - \inf(X)$. Pour tout nombre premier p, on pose $X_p = \rho_p(X)$, et $x_p = 1 - \frac{|X_p|}{p}$.

Le but des trois premières parties du problème est de donner une majoration de $|X|$ en fonction de N et des nombres x_p, où p parcourt les nombres premiers $p \leq Q$. Dans la quatrième partie, on donne une application de cette majoration.

Partie I

On note F l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ périodiques de période 1. Pour toute fonction $\phi \in F$, on pose

$$||\phi|| = \left(\int_0^1 |\phi(t)|^2 dt\right)^{1/2},$$

et, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\quad a_n(\phi) = \int_0^1 \phi(t) e^{-2\pi i n t} dt.$

Soient δ un nombre réel tel que $0 < \delta < 1$, et $M = \sup(N, \delta^{-1})$.

Pour tout $n \in X$, on se donne un nombre complexe c_n. Dans la partie I, f désigne la fonction, appartenant à F, telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on ait

$$f(x) = \sum_{n \in X} c_n e^{2\pi i n x}.$$

I.1 Soit $h \in F$, possédant les trois propriétés suivantes:

i) On a $|a_n(h)| \geq 1$, pour tout $n \in X$.

ii) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $\delta/2 \leq |x| \leq 1/2$, on a $h(x) = 0$.

iii) $||h||^2 = 2M$.

(L'existence d'une telle fonction h fait l'objet de la question I.3.)

On note g l'élément de F tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on ait: $\quad g(x) = \sum_{n \in X} \frac{c_n}{a_n(h)} e^{2\pi i n x}.$

$\sum_{n \in X} \frac{c_n}{a_n(h)} e^{2i\pi n x}$

↙

I.1.a Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\quad f(x) = \int_0^1 g(t) h(x - t) dt.$

I.1.b Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\quad |f(x)|^2 \leq ||h||^2 \int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} |g(t)|^2 dt.$

I.2 Soit A une partie finie non vide de l'intervalle $[0, 1]$, telle que, pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de A, on ait $\quad \delta \leq |x - y| \leq 1 - \delta.$

Tournez la page S.V.P.

Montrer que $\sum_{x\in A} |f(x)|^2 \leq \|g\|^2\|h\|^2$.

En déduire que $\sum_{x\in A} |f(x)|^2 \leq 2M\|f\|^2$.

I.3

I.3.a Montrer que, pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a $\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi x)e^{2\pi i x y}dx = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi x)\cos(2\pi x y)dx$,

puis que, si $-1/2 \leq y \leq 1/2$, on a $\int_{-1/2}^{1/2} 2\cos(\pi x)\cos(2\pi x y)dx \geq 1$.

I.3.b Soit $\lambda = (\sup(X) + \inf(X))/2$, et soit $h \in F$ nulle pour $\frac{1}{2M} \leq |x| \leq 1/2$, et telle que, pour $|x| \leq \frac{1}{2M}$, on ait $h(x) = 2M\cos(\pi M x)e^{2\pi i\lambda x}$.

Montrer que h vérifie les conditions i), ii) et iii) de la question I.1.

I.4 Soit B le sous-ensemble de $[0,1[$ formé des nombres rationnels de la forme p/q, p et q entiers vérifiant $0 \leq p < q \leq Q$. Montrer que $\sum_{x\in B} |f(x)|^2 \leq 2\sup(N, Q^2)\|f\|^2$.

Partie II

Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement. On note $\hat{G}$ l'ensemble des homomorphismes de G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes non nuls.

II.1 Soient m un entier ≥ 1, et $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ m éléments distincts de $\hat{G}$. Soient $a_1, \ldots, a_m$ m nombres complexes tels que, pour tout $x \in G$, $\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i(x) = 0$.

Montrer qu'alors $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$.

(On pourra raisonner par récurrence sur m, utiliser un élément y de G tel que $\chi_1(y) \neq \chi_2(y)$, et comparer les relations correspondant à x et à xy.)

On suppose désormais, jusqu'à la fin de cette partie, que le groupe G est fini.

II.2 Montrer que $\hat{G}$ est fini, que $|\hat{G}| \leq |G|$, et que, si G est cyclique, on a $|\hat{G}| = |G|$.

II.3 Montrer que, pour tout $x \in G$ et tout $\chi \in \hat{G}$, on a $|\chi(x)| = 1$.

II.4 Soit χ_0 l'élément de $\hat{G}$ tel que, pour tout $x \in G$, $\chi_0(x) = 1$. Soit $\chi \in \hat{G}$, χ distinct de χ_0. Montrer que $\sum_{x\in G} \chi(x) = 0$.

(On pourra calculer $\sum_{x\in G} \chi(xy)$, pour y convenable.)

II.5 Soit Ω une partie non vide de $\hat{G}$. Pour tout $\chi \in \Omega$, on se donne un nombre complexe a_χ, et on considère la fonction de G dans $\mathbf{C}$ telle que, pour tout $x \in G$, $f(x) = \sum_{\chi\in\Omega} a_\chi\chi(x)$.

II.5.a Montrer que $\sum_{x\in G} |f(x)|^2 = |G| \sum_{\chi\in\Omega} |a_\chi|^2$.

II.5.b Prouver que $|f(1)|^2 \leq |\Omega| \sum_{\chi\in\Omega} |a_\chi|^2$, où on a noté 1 l'élément neutre de G.
En déduire que

$$\frac{1-\omega}{\omega}|f(1)|^2 \leq \sum_{x\in G-\{1\}} |f(x)|^2, \qquad \text{où } \omega = \frac{|\Omega|}{|G|}.$$

Tournez la page S.V.P.

II.6 Soient m un entier ≥ 1, et $G_1, \ldots, G_m$ m groupes finis. Pour tout i, $1 \leq i \leq m$, on se donne une partie non vide Ω_i de $\widehat{G}_i$, et on pose

$$\omega_i = \frac{|\Omega_i|}{|G_i|}.$$

Soit f une application de l'ensemble produit $G_1 \times G_2 \ldots \times G_m$ dans $\mathbf{C}$. On suppose qu'il existe, pour tout élément $(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ de $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_m$, un nombre complexe $a_{\chi_1,\ldots,\chi_m}$ tel que, pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in G_1 \times \ldots \times G_m$,

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{(\chi_1,\ldots,\chi_m)\in\Omega_1\times\ldots\times\Omega_m} a_{\chi_1,\ldots,\chi_m}\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)\ldots\chi_m(x_m).$$

Montrer que

$$|f(1, \ldots, 1)|^2 \prod_{i=1}^{m} \frac{1-\omega_i}{\omega_i} \leq \sum_{(x_1,\ldots,x_m)\in V} |f(x_1, \ldots, x_m)|^2,$$

où on a noté 1 les éléments neutres des groupes G_i, $i = 1, \ldots, m$, et où V désigne le sous-ensemble de $G_1 \times G_2 \ldots \times G_m$ formé des éléments $(x_1, \ldots, x_m)$ tels que, pour tout i, $1 \leq i \leq m$, on ait $x_i \neq 1$.

(On pourra raisonner par récurrence sur m, et considérer, pour x_m fixé, la fonction $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ de $G_1 \times \ldots \times G_{m-1}$ dans $\mathbf{C}$.)

Partie III

Dans cette partie, on se donne une fonction f de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}$, de la forme

$$z \mapsto f(z) = \sum_{n\in X} a_n z^n, \qquad \text{où les } a_n \text{ sont des nombres complexes.}$$

De plus, pour tout entier $k \geq 1$, on note U_k le groupe des racines k-ièmes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^k = 1$. On note V_k l'ensemble des racines primitives k-ièmes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des générateurs du groupe U_k.

III.1 Soient $p_1, \ldots, p_m$ m nombres premiers distincts (m entier ≥ 1) et $n = p_1 p_2 \ldots p_m$.

III.1.a Montrer que l'application de l'ensemble produit $U_{p_1} \times \ldots \times U_{p_m}$ dans U_n définie

par $\qquad (z_1, \ldots, z_m) \mapsto \prod_{i=1}^{m} z_i \qquad$ est une bijection.

III.1.b Montrer que $\qquad |f(1)|^2 \prod_{i=1}^{m} \frac{x_{p_i}}{1-x_{p_i}} \leq \sum_{z\in V_n} |f(z)|^2.$

III.2 On dit qu'un entier $n \geq 1$ est *sans facteur carré* s'il n'existe pas de nombre entier $k \geq 2$ tel que k^2 divise n. Ceci équivaut à dire que n est produit de nombres premiers distincts. On note $S(Q)$ l'ensemble des entiers n sans facteur carré tels que $1 \leq n \leq Q$. Pour tout $n \in S(Q)$, notons $y_n = \prod_{p|n} \frac{x_p}{1-x_p}$, le produit étant indexé par les nombres premiers p divisant n; on convient que $y_1 = 1$.

Montrer que

$$L(Q)|f(1)|^2 \leq 2 \sup(N, Q^2) \sum_{n\in X} |a_n|^2,$$

où l'on a posé $\qquad L(Q) = \sum_{n\in S(Q)} y_n.$

Tournez la page S.V.P.

III.3 Montrer que $$|X| \leq 2 \sup(N, Q^2)/L(Q).$$

(On pourra considérer la fonction $z \mapsto f(z) = \sum_{n \in X} z^n$.)

III.4 Pour tout entier $n \geq 1$, notons $$n = \prod_{p|n} p^{r_p(n)}$$

la décomposition en facteurs premiers de n, et posons $$x_n = \prod_{p|n} x_p^{r_p(n)}.$$

On convient que $x_1 = 1$.

On pose $$L'(Q) = \sum_{n=1}^{Q} x_n.$$

Montrer que $$|X| \leq 2 \sup(N, Q^2)/L'(Q).$$

Partie IV

IV.1 Soit N un entier ≥ 2, et a un entier $> \sqrt{N}$. Montrer que le nombre de nombres premiers p tels que $a \leq p \leq a + N$ est majoré par

$$4 \frac{N}{\log N}.$$

On pourra utiliser l'inégalité

$$\sum_{1 \leq n \leq \sqrt{N}} \frac{1}{n} \geq \frac{\log N}{2}.$$

IV.2 Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout entier $N \geq 2$ et tout entier $a \geq 0$, le nombre de nombres premiers p tels que $a \leq p \leq a + N$ est majoré par

$$C \frac{N}{\log N}.$$

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail